Die Individualität der Welt

1. Einleitung:

1.1 Jedes Individuum erkennt die Welt auf individuelle Weise mit Hilfe seiner Sinnesorgane. Es gibt kein allgemeines Kriterium für die Richtigkeit oder Unrichtigkeit also für die Wahrheit einer Erkenntnis.

1.2 Zu den im Laufe des Lebens gewonnenen Erfahrungen gehören die Möglichkeiten, solche Erfahrungen "**mit** anderen Individuen zu **teilen**", also "Mitteilungen" zu formulieren. Derartige Mitteilungen können über beliebige Sinnesorgane geleitet werden. Dabei kommt zunächst den akustischen Mitteilungen und in weiterer Folge den darauf beruhenden schriftlichen Mitteilungen besondere Bedeutung zu.

1.3 Durch das Zusammenleben verschiedener Individuen in Gruppen (Familien, Stämme, Völker etc.) bilden sich gemeinsame Begriffe und schließlich etwas wie gemeinsame Sprachen, in denen individuelle Erfahrungen mitgeteilt werden. Offen bleibt, wie weit solche Sprachen die in sie gesetzten Erwartungen erfüllen können.

1.4 Eine der grundlegenden Fragen in diesem Zusammenhang ist die nach der **Wahrheit** einer Mitteilung. Diese Frage stellt sich insbesondere dann, wenn eine Person P_1 eine Mitteilung als wahr, eine andere Person P_2 aber die selbe Mitteilung als falsch bezeichnet. Der Leser möge dabei ebenso wie der Autor seine eigene Beurteilung der Mitteilung außer Betracht lassen und das Problem ausschließlich auf die Urteile von P_1 und von P_2 beschränken.

1.5 Der Sachverhalt kann dabei sehr komplex sein. Unterschiedliche Beurteilungen einer Mitteilung können auf unterschiedlichen Interpretationen der Mitteilung, auf unterschiedlichem Wissensstand ebenso wie auf bewusst falschen Aussagen beruhen. Der Möglichkeiten gibt es viele.

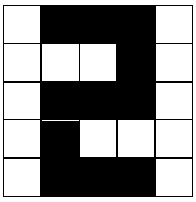
1.6 Für Außenstehende wie den Leser und den Autor steht jedenfalls die Frage nach einem **Beweis** der Richtigkeit bzw. der Unrichtigkeit solcher Beurteilungen im Vordergrund. Ein Beweis der Richtigkeit einer Mitteilung ist etwa dann für den Autor trivial, wenn die Mitteilung eine Eigenschaft eines Objektes beschreibt, welche Teil der Definition des Objektes ist, wie z.B. die Tatsache, dass ein Quadrat vier gleich lange Seiten hat. Beweise für die Richtigkeit anderer Mitteilungen können erhebliche Schwierigkeiten bereiten wie Vermutungen über mathematische Sätze zeigen, die weder bewiesen noch widerlegt sind.

1.7 Als Beweis für die Unrichtigkeit einer Mitteilung wird offenbar ein Widerspruch innerhalb dieser Mitteilung selbst anerkannt. Die Mitteilung: "Es existiert eine natürliche Zahl, die kleiner als 3 und größer als 5 ist" wird wohl nicht nur vom Autor sondern auch sehr allgemein als unrichtig angesehen. Dieses allgemeine Urteil setzt allerdings bereits Übereinkunft über die Begriffsinhalte von "existieren", "natürliche Zahl", " kleiner als", "3", "größer als" und "5" voraus. Über die vom Autor in den folgenden Überlegungen verwendeten Begriffsinhalte besteht seiner Ansicht nach genügend Übereinkunft um die von ihm entwickelten Schlussfolgerungen nachzuvollziehen. Im Übrigen ist das Entstehen solcher Übereinkünfte alles andere als trivial.

2. Für spätere Schlussfolgerungen verwendete abzählbare Mengen:

2.1 Eine **"Mitteilung M vom Umfang n"** sei ein quadratischer Raster, den n^2 **"Elementarquadrate"** der Seitenlänge 0.01 mm bilden von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind.

2.2 Einem weißen Elementarquadrat wird die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zugeordnet. Es sei a_{jk} jene Ziffer (1 oder 2), die dem in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist. Jede mögliche Mitteilung M_n vom Umfang n kann dann durch die Dezimalzahl $a(M_n) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}....a_{jk}.....a_{nn}$ eindeutig dargestellt werden. Beispielsweise wird der folgende entsprechend der Seitenlänge der Elementarquadrate auf das Fünfhundertfache vergrößerte Raster



durch die Zahl 0,1000111101100011011110001 eindeutig dargestellt.

2.3 Alle möglichen endlichen Mitteilungen M werden nun folgendermaßen abzählbar angeordnet: Zunächst werden die Mitteilungen M_n von gleichem Umfang n in Gruppen $G(M_n)$ zusammengefasst und diese Gruppen nach der Größe von n angeordnet. Innerhalb jeder Gruppe $G(M_n)$ werden sodann die Mitteilungen M_n nach der Größe der jeweiligen Dezimalzahlen $a(M_n)$ angeordnet. Es sei AO(M) die so gewonnene abzählbare Anordnung aller möglichen Mitteilungen.

2.4 Dass die Beschränkung der hier herangezogenen Mitteilungen auf Schwarz-Weiß-Informationen die späteren Schlussfolgerungen nicht beeinträchtigt zeigen die folgenden Überlegungen: Der Begriff "Mitteilung" besagt, dass eine Information von einer Person an eine andere übermittelt wird. Lässt man die Beschränkung auf Schwarz-Weiß-Informationen weg, bleibt als Aufgabe jeder möglichen Information die Übermittlung des Inhaltes der Mitteilung an eine Person so, dass diese den Inhalt der Mitteilung mit Hilfe ihrer Sinnesorgane erfassen kann. Offenbar können alle Sinnesorgane nur jeweils abzählbar viele Eindrücke aufnehmen. Der für die späteren Schlussfolgerungen wesentliche Grundsatz der Abzählbarkeit aller möglichen Informationen bleibt also auch bei Wegfall der Beschränkung auf Schwarz-Weiß-Informationen gewahrt.

2.5 Mit entscheidend für die Wahrheit einer Mitteilung M ist das Urteil einer Person P in einem Zeitpunkt T. Man verwendet daher besser den Begriff **"relative Wahrheit"** und zwar bezogen auf jeweils eine Person P und einen Zeitpunkt T. Eine Mitteilung M wird dann und nur dann als relativ zur Person P und zum Zeitpunkt T als wahr bezeichnet, wenn die Person P im Zeitpunkt T die Mitteilung M als wahr bezeichnet. Es darf dabei angenommen werden, dass P sein Urteil über M stets während einer gewissen **"Mindestdauer"** aufrecht erhält und dass P dabei ein gewisses **"Mindestvolumen"** im Raum-Zeit-Universum in Anspruch nimmt. Das **"Raum-Zeit-Universum RZU"** (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) kann durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in **"Elementarwürfel EW"** jeweils der Seitenlänge von 0.01 mm und der Dauer von 0,01 Sek zerlegt werden. Offenbar liegt mindestens einer dieser Elementarwürfel zur Gänze in dem von P für sein Urteil in Anspruch genommenen Teil des RZU und bezeichnet damit das Urteil von P im Zeitpunkt T eindeutig. Alle Elementarwürfel können unschwer mit Hilfe des Koordinatensystems abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei AO(EW).

2.6 Alle möglichen Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M können jeweils durch ein Tripel (P,T,M) gekennzeichnet werden. Das Tripel (P,T,M) bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M im Zeitpunkt T liest oder lesen würde, M als wahr bezeichnet. T ist dabei ein beliebiger Zeitpunkt aus einem von P gemäß 2.5 für sein Urteil in Anspruch genommenen Elementarwürfel. Da alle möglichen Mitteilungen M in AO(M) gemäß 2.3 und alle möglichen für ein Urteil in Frage kommenden Kombinationen (P,T) mit Hilfe von AO(EW) gemäß 2.5 abzählbar angeordnet werden können gilt dies auch für jede Kombination (P,T,M). Diese Anordnung sei **AO(P,T,M).**

3. Individualanordnungen reeller Zahlen:

3.1 Im folgenden Beispiel sollen alle Mitteilungen M = M[RZ(0,1)], die eine reelle Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben, mit Hilfe der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} gemäß 2.6 abzählbar angeordnet werden. Das Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M[RZ(0,1)] im Zeitpunkt T liest oder lesen würde, die Behauptung, diese Mitteilung beschreibe eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei, als wahr bezeichnet. Wie in 1.4 gefordert bleibt dabei die Beurteilung der Mitteilungen durch den Leser ebenso wie die durch den Autor außer Betracht. Die Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} beruht einzig und allein auf dem jeweiligen individuellen Urteil von P und sie werde daher als Individualanordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 bezeichnet.

3.2 Jedes einzelne der Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} entspricht einer reellen Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 und zwar genau jener, von der die Person P im Zeitpinkt T behauptet oder behaupten würde, sie werde durch die Mitteilung M[RZ(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben. Es ist unschwer zu sehen, dass jeweils unendlich viele solcher Tripel ein und der selben Zahl entsprechen. Aus AO{P,T,M[RZ(0,1)]} erhält man aber leicht auch eine Individualanordnung AO[RZ(0,1)] **aller** reellen Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1, etwa indem diese reellen Zahlen in der Reihenfolge angeführt werden, in der sie in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} erstmals auftreten.

3.3 Die Anordnung AO[RZ(0,1)] reeller Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß 3.2 ist insoweit vollständig, als jeder Versuch, eine angeblich in ihr nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben, wie im Folgenden gezeigt wird, misslingt. Behauptet nämlich ein Kritiker der Vollständigkeit (er werde als kritische Person mit P_k bezeichnet) in irgendeinem Zeitpunkt T_k, eine reelle Zahl $r_k \in$ RZ(0,1) zwischen 0 und 1 - etwa eine aus der Anordnung AO[RZ(0,1)] mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnene Diagonalzahl - sei in dieser Anordnung nicht enthalten, es gelte also $r_k \notin$ AO[RZ(0,1)], dann kann diese Behauptung in Form einer Mitteilung M_k dargestellt werden. Die Mitteilung M_k beschreibt also nach Ansicht der Person P_k im Zeitpunkt T_k die reelle Zahl r_k zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei und enthält die Feststellung, nach Ansicht von P_k sei r_k nicht in AO[RZ(0,1)] enthalten, es gelte also $r_k \notin$ AO[RZ(0,1)]. Nun werden aber gemäß 3.2 in AO[RZ(0,1)] genau alle jene reellen Zahlen RZ(0,1) angeordnet, die in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} enthalten sind. Darunter also auch die dem Tripel (P_k,T_k,M_k) entsprechende reelle Zahl r_k. Und damit verstrickt sich P_k in einen Widerspruch: Er behauptet in seiner Mitteilung M_k im Zeitpunkt T_k, es sei r_k eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die damit per definitionem in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} enthalten sein muss und zwar an der Stelle (P_k,T_k,M_k), woraus im weiteren ebenfalls per definitionem **$r_k \in$ AO[RZ(0,1)]** folgt. Dies steht nun aber im Widerspruch zur vorangegangenen Behauptung von P_k, wonach **$r_k \notin$ AO[RZ(0,1)].** P_k ist es also nicht gelungen, eine in AO[RZ(0,1)] nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben.

3.4 Der in 3.3 geführte Nachweis der Abzählbarkeit der widerspruchsfrei definierten reellen Zahlen zwischen 0 und 1 löst unter anderem auch das erste Hilbert-Problem für den Bereich der reellen Zahlen.

3.5 Die abzählbare Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} aller Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} gemäß 3.1 wird hier nur als Aussage über die Mächtigkeit der Menge dieser Tripel verwendet. Ebenso wird die abzählbare Anordnung AO[RZ(0,1)] aller reellen Zahlen RZ(0,1) gemäß 3.2 hier nur als Aussage über die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen RZ(0,1) verwendet. In beiden Fällen erweist es sich aber als grundsätzlich unmöglich, eine tatsächliche Anordnung dieser abzählbaren Mengen anzugeben. Grundlagen solcher Anordnungen sind ja unter anderem die Urteile aller im Raum-Zeit-Universum möglichen Personen P in allen möglichen Zeitpunkten T über den

Inhalt einer Mitteilung M und diese Urteile können offensichtlich nie vollständig bekannt sein..

4) Individualanordnungen beliebiger Mengen:

4.1 Die bisherigen Überlegungen zur Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen lassen sich auf beliebige Mengen erweitern. Solche Mengen $M(\epsilon)$ bestehen aus Elementen E_ϵ, die alle eine Eigenschaft ϵ aufweisen, die sie zu einem Element der Menge $M(\epsilon)$ macht. Anders lassen sich Mengen kaum sinnvoll definieren. Analog zu 3.1 werden die Tripel (P,T,M_ϵ) gemäß 2.6 in einer Anordnung $AO(P,T,M_\epsilon)$ abzählbar angeordnet[1]. Das Tripel (P,T,M_ϵ) bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M_ϵ im Zeitpunkt T liest oder lesen würde, die Behauptung, diese Mitteilung beschreibe ein Element $E_\epsilon \in M(\epsilon)$ eindeutig und widerspruchsfrei, als wahr bezeichnet. Analog zu 3.2 entspricht jedes einzelne der Tripel (P,T,M_ϵ) einem Element E_ϵ der Menge $M(\epsilon)$ und zwar genau jenem, von dem die Person P im Zeitpunkt T behauptet oder behaupten würde, es werde durch die Mitteilung M_ϵ eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben. In gleicher Weise wie in 3.2 erhält man aus $AO(P,T,M_\epsilon)$ eine Individualanordnung $AO(E_\epsilon)$ aller Elemente E_ϵ der Menge $M(\epsilon)$.

4.2 Die Anordnung $AO(E_\epsilon)$ ist insoweit vollständig, als wie in 3.3 jeder Versuch, ein angeblich nicht enthaltenes Element E_ϵ aus der Menge $M(\epsilon)$ widerspruchsfrei anzugeben, misslingt. Analog den Schlussfolgerungen in 3.3 wird von einem Kritiker P_k der Vollständigkeit ausgegangen, der in irgend einem Zeitpunkt T_k behauptet, ein Element $E_k \in M(\epsilon)$ sei in dieser Anordnung nicht enthalten, es gelte also $E_k \notin AO(E_{\in})$ und damit per definitionem $E_k \notin AO(P,T,M_\epsilon)$. Diese Behauptung kann als Mitteilung M_k dargestellt werden. M_k beschreibt also nach Ansicht von P_k im Zeitpunkt T_k ein Element $E_k \in M(\epsilon)$ und enthält die Feststellung, nach Ansicht von P_k sei E_k nicht in $AO(E_\epsilon)$ enthalten. Nun werden aber gemäß 4.1 in $AO(E_\epsilon)$ genau jene Elemente E_ϵ angeordnet, die in der Anordnung $AO(P,T,M_\epsilon)$ enthalten sind. Darunter also auch das dem Tripel (P_k,T_k,M_k) entsprechende Element E_k. Und damit verstrickt sich P_k in einen Widerspruch. Er behauptet in seiner Mitteilung M_k im Zeitpunkt T_k, es sei E_k ein Element der Menge $M(\epsilon)$, das damit per definitionem in der Anordnung $AO(P,T,M_\epsilon)$ enthalten ist und zwar an der Stelle (P_k,T_k,M_k), woraus im weiteren ebenfalls per definitionem **$E_k \in AO(P,T,M_\epsilon)$** folgt. Dies steht nun aber im Widerspruch zur vorangegangenen Behauptung von P_k, wonach **$E_k \notin AO(P,T,M_\epsilon)$.** P_k ist es also nicht gelungen, ein in $AO(E_\epsilon)$ nicht enthaltenes Element E_ϵ widerspruchsfrei anzugeben.

4.3 Der Begriff "überabzählbare Menge" führt gemäß 4.2 stets zu einem Widerspruch. Hingegen kann man einen Begriff **"nicht abzählbar anordenbare Mengen"** bilden und darunter Mengen von der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen

[1] Es ist zwischen der Menge $M(\epsilon)$ von Elementen E_ϵ mit der Eigenschaft ϵ und der ein Element E_ϵ nach dem Urteil von P im Zeitpunkt T eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung M_ϵ zu unterscheiden.

verstehen, für die eine Anordnung der Elemente der jeweiligen Menge etwa aus den in 3.5 genannten Gründen nicht möglich erscheint.

4.4 Der Widerspruch im Begriff "Überabzählbare Menge" führt auch zum Widerspruch im Begriff "Transfinite Kardinalzahl $\aleph_n$ mit n > 0". Insbesondere sind derartige von Cantor eingeführte Mengen in sich widerspruchsvoll. Damit werden Widersprüche in einigen Bereichen der Mengenlehre aufgezeigt.

4.5 Der in 3.3 und 4.2 jeweils angesprochene Kritiker P_k spielt hier die Rolle des Gesprächspartners von Sokrates in dessen **Mäeutik**, der Hebammenkunst. Um die entscheidenden Widersprüche herauszuarbeiten wird P_k selbst in die Diskussion einbezogen.

4.6 Die vorstehenden Überlegungen beruhen letztlich darauf, dass Mathematik nur von Personen innerhalb des Raum-Zeit-Universums betrieben werden kann und dass alle Ergebnisse mathematischer Untersuchungen durch Mittelungen gemäß 2 übermittelt werden können.